# ÜB 21/22 – Kombinatorik

**LÖSUNGEN**

1) Versuche verschiedene Lösungswege zu finden.

a) In einer Schachtel liegen auf drei Zetteln die Buchstaben M, O, T. Ohne hinzuschauen werden nacheinander die drei Zettel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Namen TOM in der richtigen Reihenfolge?

$\boxed{\text{LW 1}}$: $\xrightarrow[3]{\frac{1}{3}} T \xrightarrow[2]{\frac{1}{2}} O \xrightarrow[1]{\frac{1}{1}} M \qquad \rightarrow \mathbf{\frac{1}{6}}$

$\boxed{\text{LW 2}}$: MOT, MTO, TMO, TOM, OMT, OTM $\rightarrow \mathbf{\frac{1}{6}}$

$\boxed{\text{LW 3}}$: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 1 von 6 $\rightarrow \mathbf{\frac{1}{6}}$

b) Berechne analog das Wort BACH mit den vier Buchstaben A, B, C, H!

$\boxed{\text{LW 1}}$: $\xrightarrow[4]{\frac{1}{4}} B \xrightarrow[3]{\frac{1}{3}} A \xrightarrow[2]{\frac{1}{2}} C \xrightarrow[1]{\frac{1}{1}} H \qquad \rightarrow \mathbf{\frac{1}{24}}$

$\boxed{\text{LW 3}}$: $4! = 24$ 1 von 24 $\rightarrow \mathbf{\frac{1}{24}}$

2) Vergleiche in der Klasse verschiedene Lösungswege.

a) Es stehen drei Parkplätze zur Verfügung. Zwei nicht unterscheidbare Audis und ein Fiat wollen parkieren. Auf wie viele verschieden Arten können die Autos hingestellt werden?

AAF
AFA → **3**
FAA

b) Es stehen vier Parkplätze zur Verfügung. Je zwei nicht unterscheidbare BMW und Fiat werden geparkt. Auf wie viele Arten können die vier Autos parkiert werden?

$\boxed{\text{LW 1}}$: BBFF FFBB
BFBF FBFB → **6**
BFFB FBBF

Für den Lehrer:

$\boxed{\text{LW 2}}$: Pascalsches Dreieck $(a + b)^4$ → 1 4 $\boxed{6}$ 4 1

$\boxed{\text{LW 3}}$: Binomialkoeffizient (sprich 4 tief 2): → $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \mathbf{6}$

**Allgemein:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

3) Es wird mit zwei Würfeln gespielt. Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme (Resultate als Bruch und Prozentangabe) ...

a) ... 12

$\frac{1}{36} = \frac{1}{36} \approx$ **2,8 %**

b) ... 3

$\frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx$ **5,6 %**

c) ... 5

$\frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx$ **11,1 %**

d) ... 7

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx$ **16,7 %**

4) Bei einem Würfel wurde die Zahl 6 mit der Zahl 4 überschrieben:

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 3 gewürfelt wird?

$\frac{1}{6} \approx$ **16.7%**

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man die Augenzahl 4?

$\frac{1}{3} \approx$ **33,3%**

c) Wie oft wird die Augenzahl 3 durchschnittlich etwa vorkommen, wenn man 12 Mal würfelt und diesen Versuch 100 Mal durchführt?

$12 \cdot \frac{1}{6} = 2$ → **etwa 2 Mal**

d) Wie oft wird die Zahl 4 bei 30 Würfen durchschnittlich ungefähr auftreten, wenn man wiederum 100 Versuche durchführt?

$30 \cdot \frac{1}{3} = 10$ → **etwa 10 Mal**

5) Bei zwei Würfeln ist die Zahl 6 mit der Zahl 4 überschrieben. Bei den folgenden Aufgaben wird jeweils zweimal gewürfelt:

a) Spielt es eine Rolle, ob die 2 Würfe nacheinander oder gleichzeitig gewürfelt werden?
Nein, es spielt keine Rolle.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 4,4 gewürfelt?

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \approx$ **11,1 %**

c) Notiere alle Ausfälle (jede einzelne Möglichkeit, die gewürfelt werden kann)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 41 | 41 | 51 |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 42 | 52 |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 43 | 53 |
| 14 | 24 | 34 | $\boxed{44}$ | $\boxed{44}$ | 54 |
| 14 | 24 | 34 | $\boxed{44}$ | $\boxed{44}$ | 54 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 45 | 55 |

d) Markiere mit roter Farbe alle 4,4-Varianten und vergleiche mit der Aufgabe 2b).

4 von 36 → $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ = **11,1 %** b) und d) entsprechen einander

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mit 2 Würfen die Augensumme 7.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 41 | 41 | 51 |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 42 | $\boxed{52}$ |
| 13 | 23 | 33 | $\boxed{43}$ | $\boxed{43}$ | 53 |
| 14 | 24 | $\boxed{34}$ | 44 | 44 | 54 |
| 14 | 24 | $\boxed{34}$ | 44 | 44 | 54 |
| 15 | $\boxed{25}$ | 35 | 45 | 45 | 55 |

→ $\frac{1}{6} \approx$ **16,7%**

6) Bei einem Fussballturnier siehst du nebenstehendes Glücksrad und machst folgende Überlegungen:

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in %, dass das Glücksrad bei B stehen bleibt.

$\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$ = **25 %**

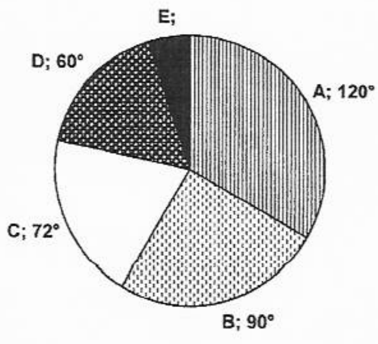
b) Wie sieht es für E aus?

E → 18° Wahrscheinlichkeit: $\frac{18°}{360°} = \frac{1}{20}$ = **5 %**

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal hintereinander A getroffen wird?

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \approx$ **11.1 %**

**Glücksrad**



d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in 3 Versuchen genau zweimal D stehen bleiben?
**nD bedeutet → nicht D**

D-D-nD: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{216}$

D-nD-D: $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$ $\rightarrow \frac{15}{216}\approx 6{,}9\%$

nD-D-D: $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in drei Versuchen mindestens zweimal das Feld C gewinnt?

Wie Lösung 6d: $3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$

und zusätzlich das Ereignis C-C-C: $\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$ $\rightarrow \frac{13}{125}$ **= 10,4 %**

f) Als letztes möchtest du die Wahrscheinlichkeit herausfinden, bei der C in drei Versuchen höchstens einmal vorkommt.
Das Ereignis C, nC, nC kann in 3 Kombinationen vorkommen. Dazu muss noch das Ereignis nC, nC, nC addiert werden.

C-nC-nC: $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$

nC-C-nC: $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $\rightarrow 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$

nC-nC-C: $\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$

nC-nC-nC: $\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$

$\rightarrow \frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$ **= 89,6 %**

7) Beim Quiz «Ziit isch Geld» von Radio DRS müssen drei Situationen überstanden werden um zu gewinnen. Die Frage 1 betrifft zwei Ereignisse, die in die richtige Reihenfolge gebracht werden müssen. Die zweite Frage betrifft 3 Ereignisse und die letzte 4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit nur mit Raten zu gewinnen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Frage 1 | $2\cdot 1$ | = | 2 Möglichkeiten |
| Frage 2 | $3\cdot 2\cdot 1$ | = | 6 Möglichkeiten |
| Frage 3 | $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ | = | 24 Möglichkeiten |

$2\cdot 6\cdot 24 = 288$ $\rightarrow$ $\frac{1}{288}$ = 0,347 ≈ **0,35 %**

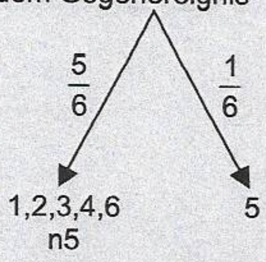
8) Du kennst sicher das Spiel Eile mit Weile. Um eine Spielfigur aus dem Häuschen aufs Spielfeld setzen zu dürfen, muss man eine Fünf würfeln. Vielleicht ist dir auch schon passiert, dass sehr lange nie die Fünf gelingen wollte.

a) Nimm einen Würfel und untersuche, wie oft du zwischen einer Fünf und der nächsten würfeln musst. Notiere die Ergebnisse für ca. 20 Versuche.

Ohne Lösung. → Es lohnt sich die Ergebnisse in der Klasse zu vergleichen.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten, eine Fünf 10 Mal, respektive 20 Mal hintereinander nie zu würfeln.

Rechne mit dem Gegenereignis




$\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx$ **16,2 %**

$\left(\frac{5}{6}\right)^{20} \approx$ **2,6 %**

c) Wie oft erhält man bei 30 Würfen durchschnittlich die Zahl 6, wenn man den Versuch sehr oft durchführt?

Zahl 6 bei einem Wurf: $\frac{1}{6}$

Bei 30 Würfen: $30 \cdot \frac{1}{6} = \frac{30}{6} = 5$

Die Zahl 6 erhält man ungefähr 5 Mal.

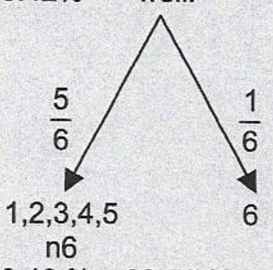
d) Erhält man bei 30 Würfen mit Sicherheit mindestens einmal die Zahl 6?

Nein

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es gelingt?

Das Gegenereignis beträgt:

$\left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0.42\%$ weil:




$\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$ bedeutet 30 Mal hintereinander

100 % - 0.42 % = **99.58 %**

Die Wahrscheinlichkeit in 30 Würfen mindestens einmal eine 6 zu würfeln beträgt 99,58 %.

9) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man erst beim 4. Wurf eine 6 würfelt?

n6-n6-n6-6: $\left(\frac{5}{6}\right)^{3} \cdot \frac{1}{6} \approx$ **9,6%**

10) Bei einem Spiel werden drei Würfel gleichzeitig geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 7 beträgt?

Beim Würfeln mit 3 Würfeln gibt es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten.

1,2,4: $\frac{6}{216}$

1,3,3: $\frac{3}{216}$

2,2,3: $\frac{3}{216}$ $\rightarrow \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \approx$ **6,94 %**

1,1,5: $\frac{3}{216}$

11) Willst du trotzdem Zahlenlotto oder andere Glückspiele ausprobieren?

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Schweizer Zahlenlotto 6 Richtige zu tippen?

$\frac{45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41\cdot40}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 8'145'060$ kurz: $\frac{45!}{39!\cdot6!}$ → **1 : 8'145'060**

b) Stelle dir vor, du würdest nachts mit dem Auto von Zürich nach Bern fahren. Irgendwo der Strecke entlang steht am Rand eine 3 m hohe und 2cm breite Latte, die du nicht sehen kannst und auf welche du zu einem beliebigen Zeitpunkt eine kleine Kugel wirfst. Die Strecke Bern-Zürich misst ca. 125 km.

125 km = $1{,}25 \cdot 10^7$ cm.

Anz. Latten, die Platz hätten: $1{,}25 \cdot 10^7$ cm : 2 cm = 6'250'000 → **1 : 6'250'000**

c) Ist a) oder b) wahrscheinlicher?

b) ist wahrscheinlicher als a)!

12) Aus einem Sack werden nacheinander 4 Kugeln mit den Buchstaben E, O, R, T gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Namen RETO?

$\boxed{\text{LW 1}}$: $\xrightarrow{\frac{1}{4}} R \xrightarrow{\frac{1}{3}} E \xrightarrow{\frac{1}{2}} T \xrightarrow{\frac{1}{1}} O$ → $\mathbf{\frac{1}{24}}$

$\boxed{\text{LW 2}}$: 4! = 24 1 von 24 → $\mathbf{\frac{1}{24}}$

13) Gegeben sind 6 Kugeln mit den Buchstaben E, E, I, L, N, O.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Namen LEONIE.

$\xrightarrow{\frac{1}{6}} L \xrightarrow{\frac{2}{5}} E \xrightarrow{\frac{1}{4}} O \xrightarrow{\frac{1}{3}} N \xrightarrow{\frac{1}{2}} I \xrightarrow{\frac{1}{1}} E$ $\quad \frac{1\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{\frac{1}{360}}$

14) Ein Würfel hat die Zahlen 1, 3, 3, 3, 4, 4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mit zwei Würfen die Augensumme 5?

$\boxed{\text{LW 1}}$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 13 | 13 | 13 | $\boxed{14}$ | $\boxed{14}$ |
| 31 | 33 | 33 | 33 | 34 | 34 |
| 31 | 33 | 33 | 33 | 34 | 34 |
| 31 | 33 | 33 | 33 | 34 | 34 |
| $\boxed{41}$ | 43 | 43 | 43 | 44 | 44 |
| $\boxed{41}$ | 43 | 43 | 43 | 44 | 44 |

→ $\mathbf{\frac{4}{36} = \frac{1}{9}}$

$\boxed{\text{LW 2}}$: $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot2 = \frac{1}{18}\cdot2 = \frac{1}{9}$

15) Ein Würfel hat die Zahlen 1, 2, 2, 2, 2, 3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mit zwei Würfen die Augensumme 4?

$\boxed{\text{LW 1}}$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | $\boxed{13}$ |
| 21 | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | 23 |
| 21 | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | 23 |
| 21 | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | 23 |
| 21 | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | $\boxed{22}$ | 23 |
| $\boxed{31}$ | 32 | 32 | 32 | 32 | 33 |

→ $\mathbf{\frac{18}{36} = \frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{LW 2}}$: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

16) Familie Grüninger hat 2 Knaben und 3 Mädchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit fünf Kindern diese Aufteilung?

**LW 1**: s. mathbu.ch 8, LU 22, S.53: Aufg.6c
(**alle** Möglichkeiten aufschreiben, aber sehr aufwändig)

**LW 2**: Wie $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$, dabei sind a die Knaben und b die Mädchen
Man kann daraus schliessen: ¼ nur Knaben, $^2/_4$ gemischt, ¼ nur Mädchen
Es folgt für $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \boxed{10}a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Vereinfacht mit dem Pascaldreieck: 1 5 10 $\boxed{10}$ 5 1 → $\frac{10}{32}$ = **31.25 %**

**LW 3**: vgl. mathbu.ch 9+ Begleitband S. 124

$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ von $2^5 = 32$ → $\frac{10}{32}$ = **31.25 %**

17) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit 7 Kindern 3 Mädchen und 4 Knaben?

**LW 1**: Pascaldreieck ergibt: 1 7 21 $\boxed{35}$ 35 21 7 1 $\frac{35}{128}$ = **27.34%**

**LW 2**: $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ von $2^7 = 128$ → $\frac{35}{128}$ = **27.34%**

18) Ein Glücksrad hat eine rote Fläche mit einem Zentriwinkel von 108°. Berechne die Wahrscheinlichkeit (mit Brüchen und in Prozentangaben), dass Rot ...

a) ... beim ersten Versuch gewinnt.

R: $\frac{108°}{360°} = \frac{3}{10}$ = **30%**

b) ... erst beim 2. Mal gewinnt.

nR-R: $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$ = **21 %**

c) ... bei 2 Versuchen 2 Mal gewinnt.

R-R: $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ = **9 %**

d) ... bei 3 Versuchen höchstens einmal gewinnt.

nR-nR-nR $\left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$

R-nR-nR $\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2$

nR-R-nR $\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2$ → $\frac{441}{1000}$

nR-nR-R $\frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2$

$\frac{343}{1000} + \frac{441}{1000} = \frac{784}{1000}$ = **78,4 %**

e) ... bei 3 Versuchen mindestens 2 Mal gewinnt.

R-R-R $\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{1000}$

R-R-nR $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10}$

R-nR-R $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} \rightarrow \frac{189}{1000}$

nR-R-R $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10}$

$\frac{27}{1000} + \frac{189}{1000} = \frac{216}{1000} = \mathbf{21.6\ \%}$

**kurzer LW**: Das Gegenereignis zu Aufgabe d) → 100 % – 78,4 % = **21,6 %**

f) ... bei 4 Versuchen nie gewinnt.

nR-nR-nR-nR $\left(\frac{7}{10}\right)^4 = \frac{2401}{10'000} \approx \mathbf{24\ \%}$

g) ... bei 4 Versuchen 2 Mal gewinnt.

aus der Möglichkeit R-R-nR-nR gibt es 6 Kombinationen

**LW 1**:

R-R-nR-nR
R-nR-nR-R
R-nR-R-nR
nR-R-nR-R
nR-R-R-nR
nR-nR-R-R

**LW 2**: Pascaldreieck: $(a + b)^4$ → 1 4 **6** 4 1 → **6** Kombinationen

**LW 3**: 2 aus 4 (wie Zahlenlotto) → (4 über 2) = $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ Kombinationen

es folgt: 1 Kombination = $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2$

6 Kombinationen = $6 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{2'646}{10'000} \approx \mathbf{26.5\ \%}$

19) Vor dir liegen zwei Säcke, Sack ❶ mit den Kugeln E,V,A,A und Sack ❷ mit den Kugeln E,E,V,V,A,A. Aus welchem Sack würdest du ziehen, um mit grösserer Wahrscheinlichkeit den Namen EVA zu erhalten. Begründe!

❶ $\xrightarrow{\frac{1}{4}} E \xrightarrow{\frac{1}{3}} V \xrightarrow{\frac{1}{1}} A$ → $\frac{1}{12} \approx$ **8,3 %**

❷ $\xrightarrow{\frac{1}{3}} E \xrightarrow{\frac{2}{5}} V \xrightarrow{\frac{1}{2}} A$ → $\frac{1}{15} \approx$ **6,7 %**

→ Man zieht aus dem Sack ❶.