# ÜB 41 – Wachstum und Zerfall

**LÖSUNGEN**

1) Mit der «Verdoppelungszeit-Faustregel» lässt sich argumentieren:
Das 1%-Wachstum der Colorados bewirkt in 70 Jahren eine Verdoppelung auf 10 Mio. Und die Bleichgesichter werden in den gleichen 70 Jahren ihre Anzahl halbieren: Das ergibt auch 10 Mio.
Taschenrechner: 5 Mio. $\cdot$ $1.01^{70}$ $\approx$ 10.03 Mio.
20 Mio. $\cdot$ $0.99^{70}$ $\approx$ 9.90 Mio.

2) **1'000 · $1.05^x$** und **1'000 + x · 100** sind einander gegenüberzustellen. Die folgende Tabelle zeigt, dass dies im **27. Jahr** der Fall ist.

| **Anzahl Jahre** | **Angebot 2** 1'000 · $1.05^x$ | | **Angebot 1** 1'000 + x · 100 |
|---|---|---|---|
| 10 | 1'630 | < | 2'000 |
| 50 | 11'467 | > | 6'000 |
| 20 | 2'653 | < | 3'000 |
| 30 | 4'322 | > | 4'000 |
| 28 | 3'920 | > | 3'800 |
| 26 | 3'556 | < | 3'600 |
| **27** | 3'733 | **≈ > <** | 3'700 |

3) Auf Ende jeden Jahres sinkt die Schuld auf CHF 380'000, CHF 360'000, CHF 340'000, CHF 320'000. Im jeweils folgenden Jahr ist bloss noch auf die verminderte Schuld die Zinszahlung von 3.25 % zu leisten.
Beispiel 31.12.05: Schuld noch CHF 380'000; 3.25 % davon sind CHF 6'175 (Zins in einem halben Jahr), zusammen mit der Amortisation CHF 26'175.
Alle Werte:

| **Termin** | **30.06.04** | **31.12.04** | **30.06.05** | **31.12.05** | **30.06.06** | **31.12.06** | **30.06.07** | **31.12.07** | **30.06.08** | **31.12.08** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Schuld** | 400'000 | 400'000 | 380'000 | 380'000 | 360'000 | 360'000 | 340'000 | 340'000 | 320'000 | 320'000 |
| **Schuldzins** | 6'500 | 26'500 | 6'175 | 26'175 | 5'850 | 25'850 | 5'525 | 25'525 | 5'200 | 25'200 |

4) Die zugehörige Gleichung lautet $(1 - p)^x = 0.88^x = 0.5$. Probieren mit dem Taschenrechner liefert:

| x | 5 | 6 | 5.4 | 5.5 | **5.42** | → in 5.42 Monaten ≈ **163 Tage** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0.88^x$ | 0.5277 | 0.4644 | 0.5014 | 0.4951 | **0.500** | |

Die Hälfte des «aktiven Materials» X ist nach etwa **163 Tagen** erreicht.

5) Kapital mit Zins und Zinseszins = $1.07^{500} \approx 4.9 \cdot 10^{14}$
Von diesem riesigen Betrag kämen bei 7 % Jahreszins etwa $3.43 \cdot 10^{13}$ CHF pro Jahr als Zins zur Auszahlung. Dividiert man diese Zahl durch 365 · 24 · 3'600 (= Anzahl Sekunden eines Jahres), so ergeben sich etwa $1.09 \cdot 10^6$ → also über einer Million pro Sekunde.
Die Aussage «mehr als eine Million pro Sekunde» stimmt also.

6) **A** Umformen: $\frac{1.05^x}{0.95^x} = \left(\frac{1.05}{0.95}\right)^x = (1.105...)^x = 4$

Für x = 13.85 ergibt sich ein Wert von 3.9994, auf 2 Dezimalstellen gerundet also 4.00.

**B** Halbieren der einen und Verdoppeln der andern Grösse ergibt den gemeinsamen Wert 2'000.
Die Faustregel: $\frac{70}{\text{Anzahl Prozente}}$ bei exponentiellem Wachstum führt zum Wert x = 14.