Definitionsmenge

Der Nenner eines Bruches darf nie 0 sein!

a) $\frac{2}{x}$ Nenner ist x, also $x \neq 0$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{ 0 \}$

b) $\frac{15}{x-3}$ Nenner ist x – 3, also $x \neq 3$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{ 3 \}$

c) $\frac{2x-1}{3x+4}$ Nenner ist 3x + 4, also

$3x + 4 \neq 0 \quad / -4$

$3x \neq -4 \quad / :3$

$x \neq -\frac{4}{3}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{ -\frac{4}{3} \}$

d) $\frac{81}{2x(x+5)}$ Nenner ist 2x(x+5), also

$2x(x+5) \neq 0$

$x+5 \neq 0$

$x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -5$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{ -5; 0 \}$

($\wedge$ bedeutet und)

Die Definitionsmenge ist so aufgebaut:

$D = \mathbb{Q} \setminus \{ 3; 0; -4 \}$

Definitionsmenge „ohne“

Grundmenge „nicht erlaubte Elemente“

Bruchgleichungen auflösen

Die ganze Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert und dann nach der Unbekannten aufgelöst.

1. Hauptnenner bestimmen
2. Ganze Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren
3. Gleichung bis zur Form "x = ..." vereinfachen
4. Check: Ist die Lösung auch wirklich eine Lösung?

a) $\frac{4x+1}{6} + \frac{3x+23}{8} = 2$ / ·24 (=Hauptnenner der Brüche)

$4(4x + 1) + 3(3x + 23) = 48$

$16x + 4 + 9x + 69 = 48$

$25x + 73 = 48$ / -73

$25x = -25$ / :25

$\underline{x = -1}$

$\underline{\underline{L = \{-1\}}}$

(Definitionsmenge)

b) $\frac{5}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x(x+1)}$ / ·x(x+1) $\underline{x \neq 0 \text{ und } x \neq -1}$

$5(x+1) - 4x = 4$

$5x + 5 - 4x = 4$

$x + 5 = 4$ / -5

$\underline{x = -1}$

$\underline{\underline{L = \{\ \}}}$

c) $\frac{1}{a-3} = \frac{2}{a^2 - 3a}$

(faktorisieren) $\frac{1}{a-3} = \frac{2}{a(a-3)}$ / ·a(a-3) $\underline{a \neq 0 \text{ und } a \neq 3}$

$\underline{a = 2}$

$\underline{\underline{L = \{2\}}}$

$$\frac{x^2}{x^2-6x+8} - \frac{x+1}{x-4} + \frac{x}{3x-6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^2}{(x-4)(x-2)} - \frac{x+1}{(x-4)} + \frac{x}{3(x-2)} = \frac{1}{3} \qquad /\cdot 3(x-2)(x-4)$$

$$x \neq 4 \quad \wedge \quad x \neq 2$$

$$3x^2 - 3(x+1)(x-2) + x(x-4) = (x-4)(x-2)$$

$$3x^2 - 3(x^2 - 2x + x - 2) + x^2 - 4x = x^2 - 6x + 8$$

$$3x^2 - 3x^2 + 6x - 3x + 6 + x^2 - 4x = x^2 - 6x + 8$$

$$x^2 - x + 6 = x^2 - 6x + 8 \qquad /-x^2$$

$$-x + 6 = -6x + 8 \qquad /+6x$$

$$5x + 6 = 8 \qquad /-6$$

$$5x = 2 \qquad /:5$$

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{5}}}$$

Ungleichungen / spezielle Gleichungen

Eine Ungleichung hat in der Regel mehrere bis unendlich viele Zahlen als Lösung. Bei Ungleichungen gibt man deshalb die **Lösungsmenge L** an. Diese hängt davon ab, welche Zahlen überhaupt zur Verfügung stehen, also ob die **Grundmenge G** die natürlichen, die ganzen, die rationalen oder die reellen Zahlen ist.

Beispiel: $6x > 4x - 14 \qquad /-4x$

$2x > -14 \qquad /:2$

$\underline{x > -7}$

$G = \mathbb{Z} \qquad \rightarrow \underline{\underline{L = \{-6, -5, -4, \ldots\}}}$

Allgemein gültige Gleichung $\qquad \boldsymbol{L} = \mathbb{Q}$

Die Umformung ergibt auf der linken und rechten Seite der Gleichung den gleichen Ausdruck. Jeder Wert für x kann eingesetzt werden, die Gleichung ist immer richtig.

Beispiel: $15(x-3) + 9 - x = 13(x-2) + x - 10$

$15x - 45 + 9 - x = 13x - 26 + x - 10$

$\underline{14x - 36 = 14x - 36}$

$\underline{\underline{\boldsymbol{L} = \mathbb{Q}}}$

Unlösbare Gleichung $\qquad \boldsymbol{L} = \{\,\}$ heisst: leere Menge

Die Umformung ergibt auf der linken und rechten Seite der Gleichung ungleiche Zahlen, x fällt weg. Kein x kann in die Gleichung eingesetzt werden, so dass sie richtig wird.

Beispiel: $4 - x = 1 - x - 1 \qquad /+x$

$\underline{4 = 0}$

$\underline{\underline{\boldsymbol{L} = \{\,\}}}$

Ungleichungsketten

$$\frac{x}{2} - 4 < 5 - \frac{x}{4} < \frac{x}{3}$$

$\frac{x}{2} - 4 < 5 - \frac{x}{4} \quad /\cdot 4$

$2x - 16 < 20 - x \quad /+x$

$3x - 16 < 20 \quad /+16$

$3x < 36 \quad /:3$

$\underline{x < 12}$

$5 - \frac{x}{4} < \frac{x}{3} \quad /\cdot 12$

$60 - 3x < 4x \quad /+3x$

$60 < 7x \quad /:7$

$\frac{60}{7} < x$

$\underline{8{,}57\ldots < x}$

$G = \mathbb{Z}$ $\quad \rightarrow \underline{\underline{L = \{9;\ 10;\ 11\}}}$

Verschiedene Grundmengen führen zu verschiedenen Lösungsmengen

Die Lösung einer Ungleichung sei: $x \leq \frac{21}{5}$

Wenn G = $\mathbb{N}$ → $\underline{\underline{L = \{1;\ 2;\ 3; 4\}}}$

Wenn G = $\mathbb{Z}$ → $\underline{\underline{L = \{4;\ 3;\ 2; 1; 0;\ -1;\ -2; \ldots\}}}$

Wenn G = $\mathbb{Q}$ → $\underline{\underline{L = \{x \mid x \leq 4{,}2\}}}$